Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 6, Núm.1, marzo, 2003, pp. 5-26.

La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad

Claudia Broitman*
Horacio Itzcovich*
María Emilia Quaranta♦

RESUMEN

En este trabajo reflexionamos acerca de algunos aspectos vinculados al aprendizaje y a la enseñanza de los números decimales. En primer lugar, nos referimos al análisis del valor posicional en las notaciones decimales en donde se intenta mostrar cómo se ponen en juego las concepciones iniciales de los alumnos sobre los números decimales y se da cuenta de los conocimientos disponibles y las dificultades que pueden constituirse en puntos de partida para nuevos aprendizajes. Luego iniciamos un primer análisis acerca del significado del valor de las cifras en las diferentes posiciones que tienen en la escritura. En segundo lugar, se aborda el tratamiento de la densidad. Se analizan los procedimientos y las reflexiones que llevan a cabo los alumnos, a propósito de problemas con los cuales se intenta descubrir el modo en que los niños conciben, inicialmente, a los decimales como subunidades que llegan a un límite más allá del cual resultan indivisibles, y se les exige, en cambio, pensar en la posibilidad de subdivisiones menores.

PALABRAS CLAVES: Educación Básica, números decimales, densidad.

The teaching of the decimals numbers: the analysis of the positional value and an approximation to the density

ABSTRACT

In this work we intend to analyze some aspects about the learning and teaching of decimal numbers. First, we will refer to the analysis of the place value in decimal notations, pointing to some students' initial conceptions about decimal numbers, as they show available knowledge and difficulties that will be been able to constitute starting points for a new learning. This study begins a first analysis about the meaning of the value of the figures in the different positions in this writings. Second, the treatment of the density at school is approached. We present procedures and students' reflections about problems that try to challenge the way in

Fecha de recepción: julio de 2001.
**Dirección de Currícula del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.*
♦ *Universidad de Buenos Aires.*

which children conceive initially decimal numbers as subunits that arrive to a limit beyond which are indivisible. Those problems demand them on the other hand to think about smaller subdivisions.

KEY WORDS: Basic education, decimals numbers, density.

L'enseignement des nombres décimaux: l'analyse de la valeur de position et une approximation à la densité

RÉSUMÉ

Cet article analyse quelques aspects au sujet de l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux. En premier lieu, nous ferons référence à l'analyse de la valeur de position dans les notations décimaux, en pointant à des étudiants conceptions initiales au sujet de nombres décimaux, comme ils montrent connaissance disponible et difficultés qui seront capable de constituer des points de départ pour les nouvelles acquisitions. Cette étude ouvre une première analyse au sujet de la signification de la valeur des chiffres dans les places différentes dans ceci nombres écrits. En second lieu, le traitement de la densité à école est approché. Nous présentons des procédures et réflexions d'étudiants au sujet de problèmes qui essaient de défier l'entrée que les enfants conçoivent initialement des nombres décimaux comme subunits qui arrivent à un limite qui est indivisible au-delà. Ces problèmes demandent, au contraire, que ils pensent au sujet de plus petites subdivisions.

MOTS CLÉS: scolarité obligatoire, nombres décimaux, densité.

O ensino dos números decimais: análise do valor posicional e uma aproximação à densidade.

RESUMO

Propomos neste trabalho fazer uma reflexão em torno de alguns aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem dos números decimais. m primeiro lugar nos referiremos a análise do valor posicional nas notações decimais. Tentamos mostrar como aparecem as concepções iniciais dos alunos sobre os números decimais, destacando os conhecimentos disponíveis e dificuldades que poderão se constituir em pontos de partida para novas aprendizagens. Inicialmente fazemos uma primeira análise do significado do valor dos numerais nas diferentes posições ocupadas na escrita de tais números. Em seguida abordamos o tratamento da densidade. Analisamos os procedimentos e reflexões dos alunos mediante problemas que desafiam o modo que as crianças concebem inicialmente os decimais como subunidades que chegam a limites acima dos quais resultam indivisíveis exigindo, como mudança, pensar na possibilidade de subdivisões menores.

PALAVRAS CHAVES: Educação básica, números decimais, densidade.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es dar algunos aportes sobre ciertos aspectos del aprendizaje y de la enseñanza de los números decimales en el segundo ciclo de la EGB[1]. Como marco teórico se consideran los trabajos de la didáctica de la matemática francesa, en particular, el estudio y análisis de los procesos y fenómenos de la enseñanza abordados por Brousseau (1981) y el desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas (1986). En ella, asumiendo la perspectiva constructivista de la teoría de Piaget, se modeliza la apropiación del sentido de los conocimientos matemáticos a través de interacciones con un medio (milieu) que se requiere utilizar como herramienta de solución.

Sobre los números decimales, se cuenta con varias investigaciones (Brousseau y Brousseau, 1987; 1981; Centeno, 1988; Douady, 1980) a partir de las cuales se conoce que muchos de los errores producidos por los alumnos cuando trabajan con números decimales se deben a que extienden a este campo sus conocimientos construidos previamente —y válidos— en el campo de los números naturales. Se trata de momentos necesarios en la apropiación de este contenido que es preciso superar progresivamente, en un proyecto de enseñanza concebido a largo plazo.

Nos ocupamos aquí de dos aspectos involucrados en un proyecto de enseñanza de los números decimales en quinto grado: el análisis del valor posicional y el problema de la densidad.

ACERCA DEL ANÁLISIS DEL VALOR POSICIONAL DE LOS NÚMEROS DECIMALES

En esta primera parte, se hace referencia de algunos datos obtenidos en el marco de un proyecto de desarrollo curricular llevado a cabo en varias escuelas de la Ciudad de Buenos Aires[2]. El proyecto incluyó, entre otras tareas, el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de algunas cuestiones relativas a los números decimales, su desarrollo por parte de un grupo de docentes de la Ciudad, su análisis y la elaboración de un documento de difusión (en prensa).

La enseñanza de los números decimales suele comenzar a partir de su uso en los contextos —más familiares para los niños— del dinero y las medidas. Si bien esta primera apelación en estos contextos es necesaria porque permite establecer puentes entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos significados que se procura que construyan, presenta limitaciones para el abordaje de aspectos esenciales de los decimales (por ejemplo, los números que allí participan no conforman un conjunto denso). Es decir, con problemas relacionados con la medida y el dinero no pueden ponerse en cuestionamiento muchas de las ideas erróneas que sostienen, inicialmente, los niños como por ejemplo: "dado un número decimal, es posible hallar el siguiente".

Por lo tanto, se hace necesario, descontextualizar, progresivamente, las primeras relaciones construidas en estos contextos para poder avanzar en el análisis de las relaciones y operaciones subyacentes en la organización posicional de las escrituras decimales y hacia una introducción de la densidad, propiedad de este conjunto numérico.

En este trabajo se centra nuestra atención en la entrada en el estudio de los números decimales a partir de un conjunto de problemas. Focalizaremos, en particular, sobre las notaciones espontáneas de los alumnos de quinto

[1] Educación General Básica.
[2] Proyecto de desarrollo curricular coordinado por Patricia Sadovsky. Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires.

grado[3]. En estas notaciones se ponen en juego las concepciones iniciales de los alumnos acerca de los números decimales, y dan cuenta de un bagaje de conocimientos disponibles; además algunas dificultades que pueden constituirse en puntos de partida para nuevos aprendizajes.

A los alumnos se les ha presentado un conjunto de problemas que involucran cálculos con dinero, para que desplieguen recursos y notaciones espontáneas en el tratamiento inicial de estos "números con coma" y tomen en cuenta sus conocimientos extraescolares sobre este contexto. Algunos de los problemas son los siguientes:

1) *Con monedas de los siguientes valores: (dibujo de las siguientes monedas $1; 50c; 25c; 10c; 5c; 1c) escribí tres maneras de pagar $3,75. (se puede usar varias monedas del mismo valor)*

2) *Anotá dos o tres maneras diferentes de formar: $ 0,87 y $ 2,08*

Los alumnos encuentran diversos recursos que les permiten distinguir en sus escrituras pesos de centavos (Figuras 1a, 1b y 1c). Algunos niños utilizan notaciones en las cuales no aparece escrita sistemáticamente la coma, aunque dan cuenta que no se "mezclen" las diferentes unidades de medida en cálculos verticales escritos. Por ejemplo, para sumar pesos con centavos dejan vacío el lugar de los décimos y de los enteros[4].

Otros niños (Figuras 2a y 2b) usan números naturales cuando escriben el valor de las monedas, sin establecer ninguna notación que

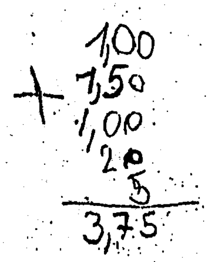

Figura 1a

distinga si son pesos o centavos. A pesar de ello, durante el cálculo, sí indican de qué unidad se trata y, en los resultados de las sumas, aparece una escritura con coma.

También, aparecen escrituras con un uso incorrecto de la coma (Figura 3). Sin embargo,

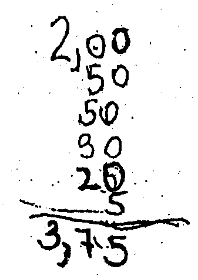

Figura 1b

[3] El quinto grado de la EGB en Argentina corresponde, en general, aproximadamente a la edad de 10 años.

[4] Lerner (1992: 165) reseña que, en la historia de la numeración escrita, "dejar un lugar vacío" para indicar la ausencia de cantidad de una de las potencias de la base, fue una solución encontrada por los babilonios, aproximadamente, en el año 2000 AC.

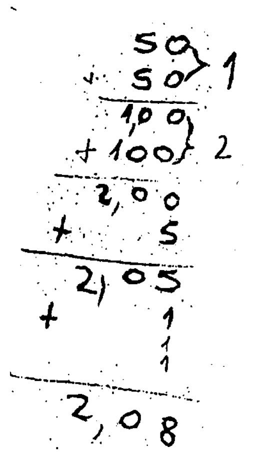

Figura 1c

los niños ejercen un control en sus cálculos mentalmente. Otros alumnos (Figura 4) utilizan simultáneamente, dos tipos de escrituras numéricas en el mismo cálculo: escrituras con coma para los pesos y sin coma para los centavos, y a veces aclaran en cada caso de qué unidad de medida se trata.

Numerosas escrituras presentan el uso simultáneo de dos unidades de medida (Figura 5). Sus autores tratan en los cálculos a los centavos como números naturales; escriben la palabra *centavos* a la derecha del número, y colocan el signo $ a la izquierda del mismo. Probablemente, el uso del signo *pesos* funciona como *forma fija convencional*, y no les parece contradictorio considerar a los centavos como unidad de medida. El signo pesos indica que se trata de dinero, pero no está relacionando al número 50, o también, puede estar refiriéndose, solamente, al número anotado a la izquierda de la coma, mientras que la indicación de *centavos* podría referir al número anotado a su derecha.

De esta manera, parece que los niños ya supieran cómo sumar pesos y centavos, y así, este conocimiento les permite ejercer un *ajuste* en sus escrituras; escriben comas o dejan espacio en sus posiciones para lograr que

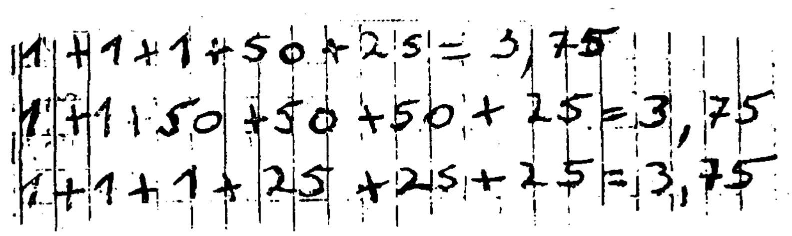

Figura 2a

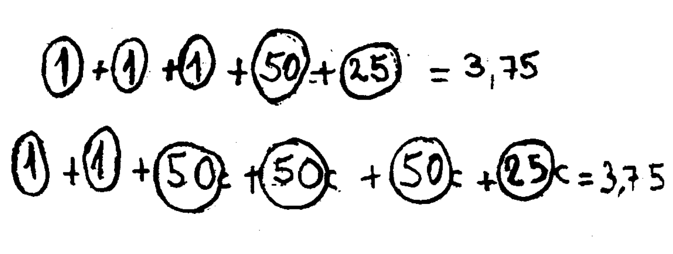

Figura 2b

1,00 + 1,00 + 1,00 + 1,00 - 25,00
3,75

Figura 3

1,00 + 1,00 + 1,00 + 50c + 25c = 3,75

Figura 4

$ 50 centavos $ 2,50

Figura 5

coincidan los resultados obtenidos con los que saben, deben obtener. Este control se ejerce, aún, a costa de producir escrituras matemáticas incorrectas (Figura 6).

Algunos niños nos explican cómo ejercen este control: "anotamos cincuenta; pero en verdad es cero, coma cincuenta". O "pensamos sin coma, y luego pusimos la coma". El dominio de los números naturales y del dinero a los alumnos les permiten controlar producciones, escrituras y resultados.

¿Por qué es interesante favorecer la aparición de estas notaciones no convencionales en las aulas? ¿Por qué analizarlas en clase? Porque ponen en juego las concepciones iniciales de los alumnos acerca de este nuevo conjunto numérico, y dan cuenta de sus esfuerzos para diferenciar la parte entera de la decimal, además de controlar el significado de sus propias escrituras, y de las acciones que llevan a cabo cuando las utilizan en cálculos.

Ahora bien, es necesario indicar que estas producciones de los niños y de los conocimientos que ponen de manifiesto han sido, desde la finalidad de la enseñanza, exclusivamente el punto de partida para la construcción de nuevos conocimientos y no el objetivo del trabajo efectuado en las aulas. Estas escrituras necesitan ser orientadas hacia formas más convencionales.

Pero, ¿cómo garantizar su evolución? Es evidentemente que, el solo hecho de presentar a

50 X 5 = 2,50

Figura 6

los alumnos una colección de problemas no garantiza la evolución de sus conocimientos, y la resolución de los problemas no es suficiente para que los alumnos tengan la necesidad de llevar a cabo un análisis del significado de cada cifra. Así, es necesario ejercer una cierta *presión* para que evolucionen las escrituras de los alumnos y que éstos se involucren en un análisis profundo del valor posicional. La evolución desde las notaciones espontáneas y producciones erróneas hacia formas convencionales, y de las relaciones implícitas hacia la explicitación de las mismas, fueron promovidas, intencionalmente, por las intervenciones de los maestros, muchas de ellas, en momentos de trabajo colectivo posterior a la resolución de los problemas.

Por ejemplo, una docente plantea a sus alumnos una respuesta errónea para que analicen la relación entre la escritura y la cantidad de monedas de diez centavos:

D: En la escuela de la mañana los chicos me dijeron que 2,08 se formaba con veintiocho monedas de diez centavos. ¿Ustedes que piensan?

A: No, porque así es dos coma ochenta.

D: ¿Y no es lo mismo?

Otro A: Si ponés el cero adelante del ocho es unidad, y si no, es decena. Según donde pongas el cero cambia el valor.

En otra escuela, la docente retoma una afirmación de una alumna sobre la cantidad y tipo de monedas que representa cada cifra:

D: Lucas dice que el ocho de 2,08 son ocho monedas de un centavo. ¿Cómo sabemos si está bien?

A: El ocho está formado por centavos, lo reconozco por la ubicación. El dos está formado por doscientos centavos.

D: Y ¿cuál es el valor del ocho en cero coma ochenta y siete (que escribe) ?

A: Ochenta monedas de un centavo o, si no, ocho monedas de diez centavos.

A: El segundo lugar es para un centavo y para cinco centavos.

Luego de varios problemas, se presenta a los alumnos una nueva situación que requiere introducir escrituras —ahora sí, convencionales— en la calculadora. El control externo que los alumnos pueden ejercer en los otros problemas, ya no era suficiente en éste. Al anotar cada número era necesario marcar en la calculadora si se trata de pesos o centavos.

"Un chico recibió un premio con las siguientes monedas: 12 de 10 centavos, 2 de 1 peso, 8 de 1 centavo y 3 de 25 centavos. Para saber cuánto había ganado hizo cálculos con la calculadora y obtuvo el siguiente resultado:

$$0,08 = 0,08 \times 1 = 8 \times 0.01$$

Figura 7

4,03. Sabemos que el resultado es correcto. ¿Qué cálculos pudo haber hecho para obtener en el visor de la calculadora ese número? Anotalos y verificalos con tu calculadora."

Frente a la dificultad de *escribir* en la calculadora los cálculos con centavos, y que el resultado aparezca expresado en escritura "con coma", los niños utilizan diferentes estrategias y discuten acerca de cómo anotar en la calculadora si se trata de pesos o centavos.

Un par de alumnos llegan a colocar la coma en el número que expresa la cantidad de monedas en lugar de hacerlo en el que expresa el valor de la moneda, (como por ejemplo 0,08 × 1, en lugar de 8 × 0,01 para obtener 0,08). (Figura 7) Anotan cálculos que no representan el problema pues quieren obtener un resultado anticipado mentalmente. Nos interesa mostrar este procedimiento porque se está poniendo de manifiesto la anticipación del resultado que se obtendría con ese cálculo, coincidiendo con el que el niño busca obtener. Los alumnos revisan su producción a partir de la intervención que hace el docente preguntando acerca del significado de 0,08.

Otro procedimiento que se da para este problema consiste en introducir en la calculadora los resultados parciales (120 + 2 + 8 +75) sin distinguir que el 120, el 8 y el 75 se refieren a centavos y el 2, a pesos. El resultado erróneo que obtienen al sumar los cuatro números es interpretado de diferente manera por los niños. Algunos, al revisar su producción corrigen su error. Hay quienes adjudican la equivocación al enunciado del problema, y llegan algunos de ellos a exclamar: "el pibe (referido por la situación) se equivocó en las cuentas". Otros, toman conciencia de su error a partir de la discrepancia entre el resultado por ellos obtenido y el que se indica en el texto sin llegar, no obstante, a advertir dónde reside el error y corregirlo. Para este último grupo, la discusión colectiva constituyó una oportunidad en la cual reconocer dónde se habían equivocado y poder rectificarlo.

Muchos alumnos dicen que estas operaciones sólo se puede hacer mentalmente "porque no se puede poner en la calculadora si son centavos", y hay quienes incluso intentan escribir con letras de la agenda electrónica la palabra *centavos* o susurrarle en broma a la calculadora de qué unidad se trata: *centavos*.

Algunos niños efectúan cálculos combinados, y manejan a los números parciales como naturales, y debajo de cada uno de estos cálculos utilizan escrituras correctas con coma. Por ejemplo, (figura 8) para (8 × 1), escribir "0,08" en la hoja e ingresar este dato en la calculadora. Otros, después de obtener el resultado, corrigen la escritura de los números de manera tal que aparezca correctamente la coma en todos ellos.

Esta variedad de recursos permite al docente instalar en la clase la discusión en torno a las escrituras convencionales de los números "con coma" y son un punto de partida para el análisis del valor posicional.

12. 10 + (2,00) + (8.1) + 3 x 25 = 4,03

1,20 + 2,00 + 0,08 + 0,75 = 4,03

Figura 8

También, aquí es necesario destacar cómo las intervenciones de los docentes se dirigen, intencionalmente, a abordar el problema de la escritura y de las relaciones entre las diferentes posiciones, tal como nos lo muestra este fragmento de clase:

Docente: ¿Cómo hicimos para escribir diez centavos en la calculadora?

Varios alumnos: cero coma diez.

D: ¿Y qué parte del peso son los diez centavos?

Algunos alumnos: Es la décima parte.

A_1: El uno es la decena de los centavos y el cero es la centena.

A_2: No, no son decenas. Eso es del otro lado de la coma. Tiene cero unidades y diez centavos.

D: ¿Y cómo escribiríamos un centavo en la calculadora?

Varios A: cero coma cero uno.

D: ¿Qué parte del peso es un centavo?

Varios A: La centésima parte.

D: ¿Podremos escribir con una fracción los diez centavos y con otra fracción el centavo?

A_2: Yo puedo escribir con una fracción los cincuenta centavos.

D: Dale, escribila en el pizarrón.

A_2: (Pasa al pizarrón y escribe "½")

A: Claro, porque es la mitad de un peso.

D: ¿Y cómo escribimos los diez centavos?

A: Yo sé (Pasa al pizarrón y escribe "1/10").

D: ¿Y un centavo?

Algunos A: Uno sobre cien.

Otros A: Uno rayita cien.

A continuación, se analiza el trabajo de otros problemas en los cuales también se revisa la información que portan las escrituras "con coma". Se busca, en particular, que los alumnos encuentren la relación entre la escritura y el valor de cada moneda. En este problema se intenta recuperar la idea de que, por ejemplo, en 4,25; el 2 indica dos monedas de 10 centavos, el 5 indica cinco monedas de 1 centavo, etcétera.

"Si sólo tuvieras monedas de 10 centavos, ¿cuántas necesitarías para pagar justo estas cantidades?: $ 1; $ 0,80; $ 2,20; $12,50; $4,25; $4,03; $0,05"

Para cada uno de estos problemas, destacamos la necesidad de llevar a cabo intervenciones que lleven a la explicitación de las relaciones entre la posición de cada cifra en el número y su valor en monedas. Si estas relaciones no son retomadas por el docente para toda la clase, queda en el terreno implícito y privado de algunos alumnos. Incluso cuando un procedimiento no ha surgido en la clase, los docentes mismos pueden llevar a su análisis, como sucede en el siguiente ejemplo:

Docente: Los chicos de la mañana dicen que mirando el número uno se puede dar cuenta de cuántas monedas de diez se necesitan.

Facundo: Sí, sacándole el cero y la coma.

Alumno: Sacándole el cero es más fácil.

Facundo pasa al pizarrón y muestra señalando cada una de las cantidades (para 2,20): Acá le saco el cero y la coma y me da veintidós (borra el cero y la coma).

Lucas: "Si le sacás el cero a cuatro coma cero tres no pasa nada, igual no podés"

F: Depende del número que sea.

F: Ahora me doy cuenta por el diez, tengo que saber cuántas entran ahí. Vos te das cuenta cuando podés hacer con monedas de diez, porque tiene que terminar en cero. Si lo ves que termina en otro número, no se puede.

Luego se han presentado otros problemas que tienen por objetivo la explicitación de que 10 centavos equivalen 1/10 del peso y 1 centavo a 1/100 del peso y se analiza esta relación en las escrituras decimales.

Recordamos que estos problemas sólo abordan una introducción en el análisis del valor posicional, retomado y profundizado en la secuencia mencionada a partir de otro conjunto de problemas en el contexto de las medidas de longitud, donde se busca avanzar acerca del significado de las cifras en las escrituras decimales, y se analizan sus relaciones con las fracciones decimales. Esta progresión prevista hace que, frente al problema recién mencionado, a veces los docentes *dejen pasar* provisoriamente, afirmaciones de los alumnos como la de Facundo sobre la necesidad de que una cantidad termine en cero para poder formarse con monedas de 10 centavos. Otras veces, intervienen proponiendo contraejemplos como por ejemplo, \$15; ó \$2,5; etcétera.

Para concluir con esta primera parte acerca del análisis del valor posicional en los números decimales, señalemos que hemos querido enfatizar:

— la importancia de generar condiciones que promuevan la aparición de notaciones espontáneas y recursos intuitivos sobre los números decimales, pues estas notaciones evidencian ciertas concepciones de los alumnos en este campo numérico;

— la necesidad de abordar, didácticamente, el análisis de estas notaciones -correctas o erróneas, convencionales o no- como punto de partida hacia la adquisición de notaciones convencionales;

— la fecundidad del trabajo inicial con el dinero, justificada por los conocimientos que los niños tienen sobre el dinero, ello les permiten anticipar y controlar procesos de resolución y resultados;

— el reconocimiento de los límites que tienen de ciertos problemas en el contexto del dinero para profundizar en el estudio del valor posicional y de la relación entre los números decimales y las expresiones fraccionarias, etcétera;

— la importancia de intervenciones específicas que apunten a la explicitación, circulación e institucionalización de las relaciones que se pretende enseñar.

Con esta primera secuencia de problemas se pueden establecer vínculos entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos significados que se procura que ellos construyan. Sin embargo, se presentan limitaciones en el abordaje para aspectos esenciales de los decimales. Por lo tanto, se hace necesario, descontextualizar progresivamente las primeras relaciones construidas. Esta descontextualización, en la secuencia didáctica mencionada involucra diferentes tipos de problemas en los cuales se busca:

— promover un trabajo que permita extender el análisis efectuado sobre el valor posicional en el contexto del dinero hacia nuevos contextos: por ejemplo, la medidas de longitud;

— desplegar situaciones en donde se exija el análisis de las relaciones entre el significado de las cifras que componen los números decimales y las fracciones decimales;

— involucrar a los alumnos en la explicitación de las relaciones entre las escrituras decimales y el valor posicional de cada cifra en problemas estrictamente numéricos;

— promover el establecimiento de las relaciones entre las escrituras decimales y las operaciones multiplicativas que subyacen a éstas en diversos tipos de problemas.

UNA APROXIMACIÓN A LA IDEA DE DENSIDAD

Ahora, queremos referirnos al tratamiento de un conocimiento vinculado a los números decimales que corresponde a un momento más avanzado en el abordaje didáctico de estos nuevos números para los niños. Se trata de una de las propiedades del conjunto de los números racionales, a veces ignorada en la escuela básica: su densidad. Dados dos números decimales, por ejemplo 4,2 y 4,3; los niños suelen afirmar que no es posible hallar otros números entre ellos. Esto es así porque —como ya mencionamos— conciben a este nuevo conjunto numérico desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales.

Es necesario un trabajo didáctico adecuado y constante para cambiar las ideas que tienen los alumnos válidas sólo en el campo de los naturales pero que han sido generalizadas para los números racionales; además, reconstruir al mismo tiempo aquellas propiedades que son específicas de estos últimos. Ese trabajo implica, entre otras cosas, un primer acercamiento a cierta idea *intuitiva* de la densidad en los números racionales.

Nos hemos referido a los límites en los contextos del dinero, y la medida para poder abordar estas cuestiones, en tanto son contextos para los cuales existe una unidad de medida indivisible, "un átomo más allá del cual todos los valores subliminares se confunden" (Brousseau, 1980). En el caso del dinero, sólo se cuenta con valores hasta los centésimos y, en el caso de las medidas, si bien la definición comprende que cada unidad de medida puede ser dividida en diez infinitamente, esta subdivisión sólo alcanza los límites empíricos permitidos por los instrumentos de medida, o sólo llega hasta los límites de lo útil o razonable. Si se restringe el trabajo con decimales a estos contextos no se ponen en juego a estos números con sus propiedades; así, intervienen como números con una relación de orden discreto, del mismo modo que los números naturales. Por ello, la enseñanza de los números decimales (y, en general, de los racionales) requiere, también de situaciones

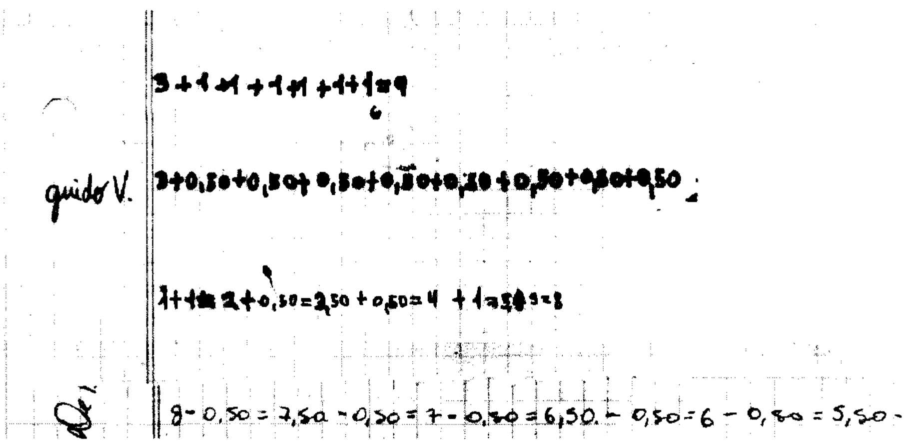

Figura 9

que, más allá de estos contextos, permitan una aproximación a la idea de densidad.

En seguida presentamos algunas resoluciones, comentarios, discusiones y conclusiones suscitados en alumnos de 6° año de EGB, a propósito de dos problemas en donde se apuntaban, precisamente, poner en juego los aspectos mencionados en el párrafo anterior.

El primer problema planteado es el siguiente: el docente anota el número 3 en el pizarrón e indica a los alumnos que deben sumarle la mayor cantidad de números posibles sin pasarse de 10. Al llegar o pasarse de 10, deben detener las sumas, y entonces, gana quien logre la mayor cantidad de sumandos. Para llevar un mejor control, deben anotar la cantidad de sumandos. Los alumnos pueden utilizar la calculadora si lo desean.

Algunos alumnos, como Guido y Ornella (Figura 9), comienzan sumando los números 1 hasta llegar a 9. Luego advierten que, usando decimales, utilizan más números. Así es como se escucha preguntar: "¿Se puede con coma?" "*Afinan entonces su apuesta*" y prueban sumar de a 0,50.

Maxi (Figura 10) comienza con 0,50. Luego, mediante descomposiciones de 0,50, utiliza números cada vez menores, y así, logra aumentar la cantidad de sumandos. Procede a partir de descomposiciones de 1; luego de 0,50; de 0,25; de 0,10.

En un segundo intento, el alumno avanza descomponiendo cada 1 en sumas reiteradas de 20 veces 0,05. Obsérvese, sin embargo, la escritura de los primeros (0,5), error que pasa inadvertido para el niño y cuenta como cinco centésimos del mismo modo que hace con el resto. Esto no impide que guarde control de la equivalencia entre 20 veces 0,05 y 1; o quizás, esté pensando en la equivalencia entre 10 veces 0,05 y 0,50, como puede suponerse por la distribución en dos grupos en diez de sus notaciones.

Tito (Figura 11) suma decimales –probablemente porque escuchó en la clase que estaban usando decimales- pero, a diferencia de sus compañeros, utiliza números mayores que 1. Lo interesante es observar cómo en los sucesivos intentos busca números menores —si bien todos mayores que 1—, que los sumandos precedentes, y de esta manera intenta incrementar la cantidad de sumandos.

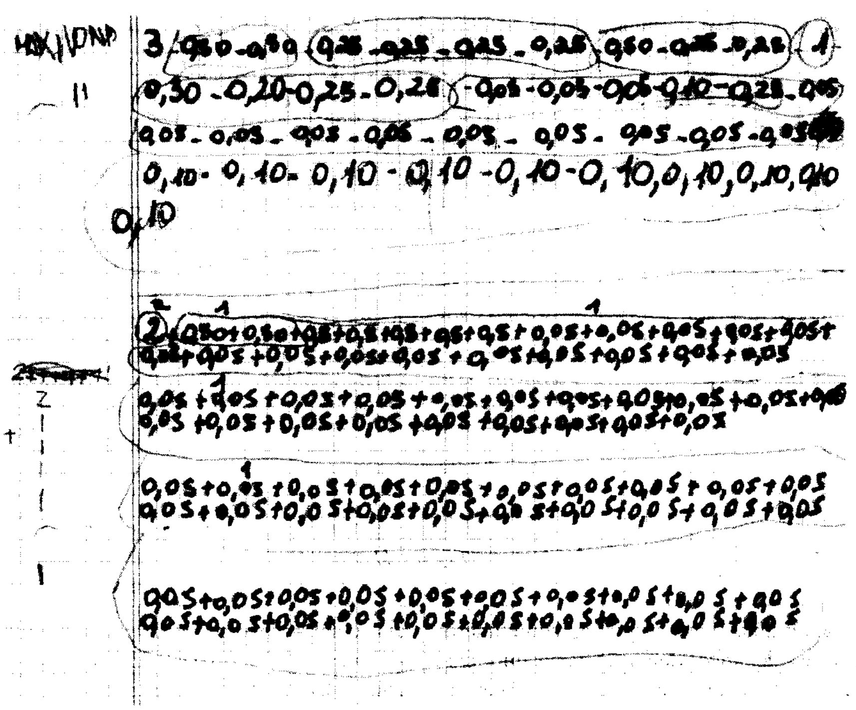

Figura 10

Pamela (Figura 12) llega a 9 sumando de 1. Luego, agrega décimos hasta alcanzar 9,9. Para no llegar a 10, le suma 0,09 y allí se detiene.

Manuel, de entrada, se propone sumar milésimos (Figura 13). Abandona sus anotaciones cuando advierte lo extenso que es escribirlos todos. Marca, en un costado de la hoja, la cantidad que necesita.

Quizás por esa razón, Camila y Justina (Figura 14), quienes también han comenzado

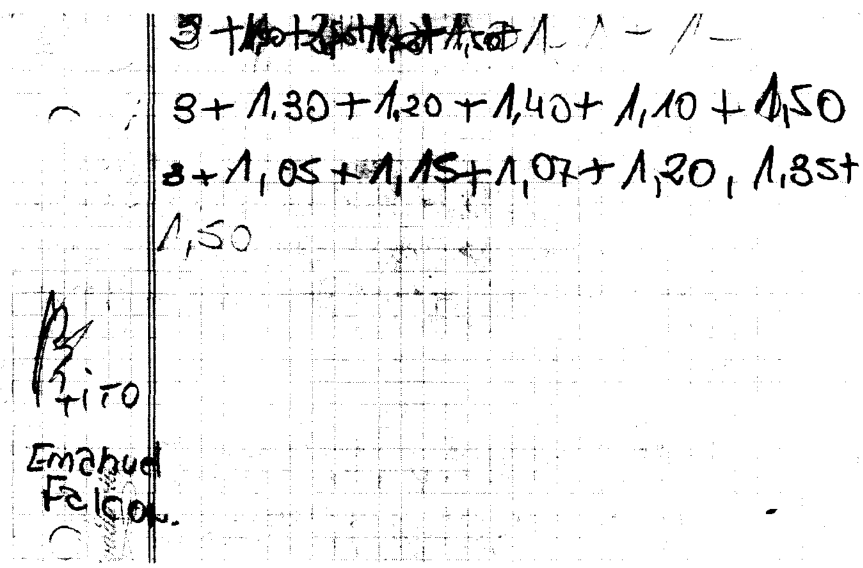

Figura 11

sumando milésimos, continúan con números mayores: décimos y luego 25 centésimos para aproximarse, fácilmente, al 10. Obsérvese que, amplían y acotan los sumandos a su voluntad; con ello tratan de acercarse a 10, y de lograr una mayor cantidad de sumandos. Llegan a utilizar hasta diez milésimos, controlan, perfectamente, lo que están agregando.

¿Qué vemos a lo largo de estas resoluciones? Todos estos alumnos utilizan números decimales, pero lo hacen de diferente manera. Todos ellos advierten que sumar números menores que 1 incrementa la cantidad de sumandos a utilizar. Este objetivo los lleva a ajustar sus intentos, y buscan números progresivamente menores. Algunos niños lo hacen a partir de formas fijas ligadas, probablemente al uso del dinero como 0,50 y sus descomposiciones en 0,25; 0,10 y 0,05. Otros, van más allá, utilizan subdivisiones menores en milésimos y hasta diez milésimos.

En cualquiera de estos casos, todos los alumnos logran controlar diferentes cuestiones en relación con lo que llevan a cabo: las sumas parciales que van obteniendo para evaluar cuánto se acercan a 10, qué cantidades les conviene sumar, equivalencias entre diferentes descomposiciones, cómo ir proponiendo números menores, etcétera.

A continuación, transcribiremos un fragmento de la puesta en común organizada por el maestro, allí se pone de manifiesto el avance de las relaciones establecidas por los alumnos, a partir del análisis en la resolución de

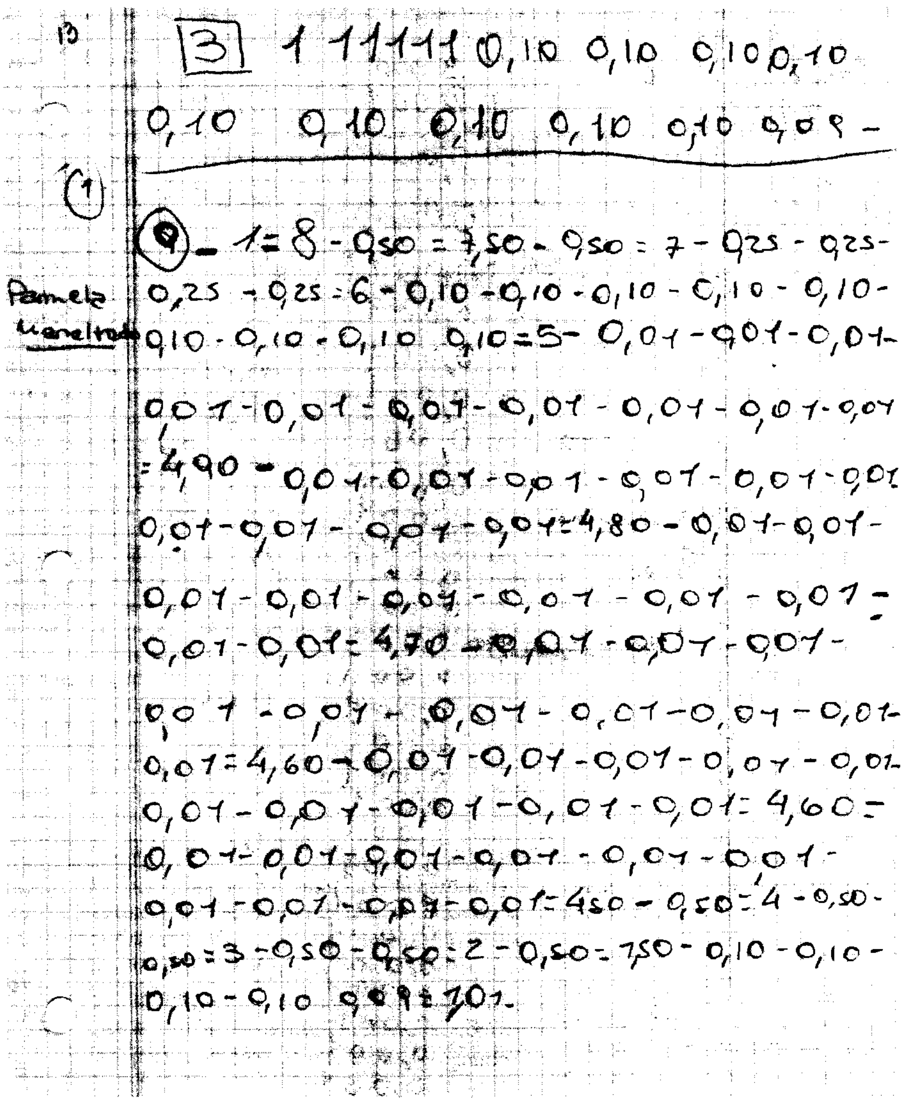

Figura 12

problemas, lo cual fue promovido por las intervenciones del docente.

Después de haber mostrado algunos procedimientos, el maestro comenta la resolución que no concluyó Manuel:

Docente: anota "3 + 0,001 + 0,001..." (y pregunta): para llegar hasta casi el diez, ¿cuántos de éstos (señala 0,001) necesito sumar? (señala 0,001)

Alumno: Mil.

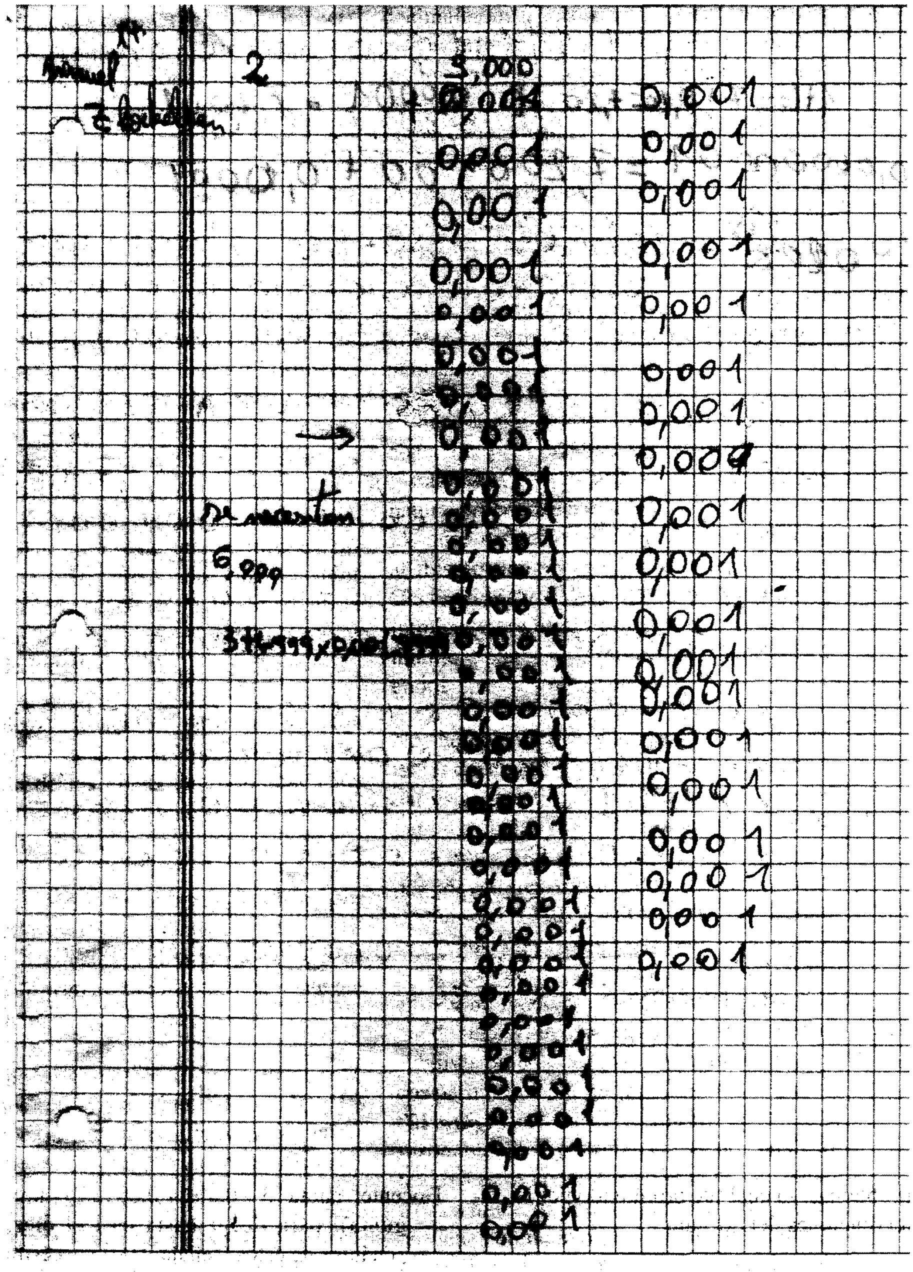

Figura 13

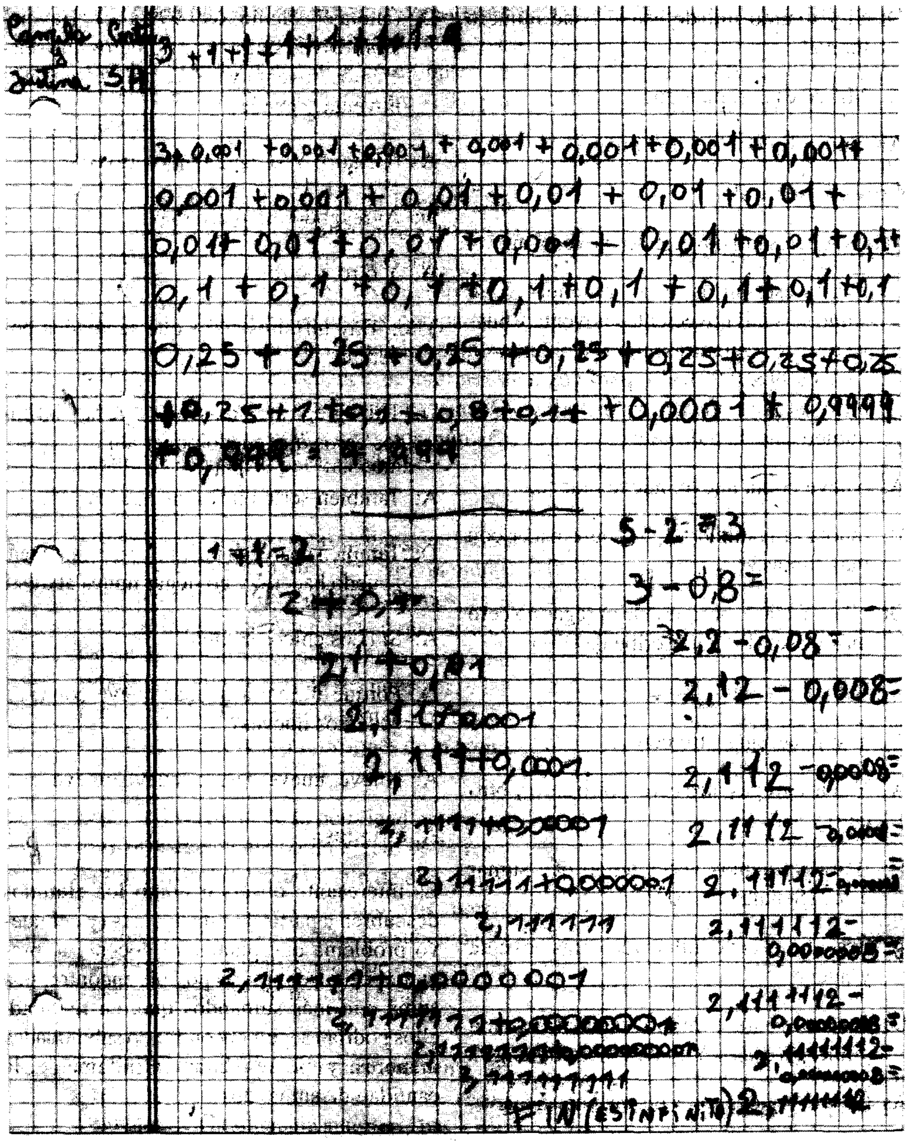

Figura 14

D: Si yo sumo mil de estos, ¿qué número tengo?

A: Mil de esos suman uno.

Alumnos: Entonces, siete mil

Otros A: seis mil.

Varios A: seis mil novecientos noventa nueve.

D: ¿Vas a escribirlos todos, Manuel? Si yo sumo seis mil novecientos noventa y nueve de estos (mientras anota en el pizarrón "3 + 6999 × 0,001 ="); pero voy a escribirlo así para no escribirlos todos. ¿Qué número me da todo esto?

A: Nueve coma nueve, nueve, nueve.

D: (anota el resultado). ¿Y podré hacer con más sumas?

Ornella: Y claro, porque si le agregas un cero más a ése. (Pasa y escribe 0,0001)

A_1: Así sumás más.

A_2: Y si le agregás otro cero...

A_3: Y si le agregás otro cero y otro cero y otro cero y así...

D: ¡Pará! ¿Cuántas veces tengo que sumar éste? (Señala el 0,0001.)

A: Sesenta y nueve mil novecientas noventa y nueve

D: Sesenta y nueve mil novecientas noventa y nueve veces. ¿Y qué número obtengo?

As: (Gritan): nueve coma nueve, nueve, nueve.

D: ¿Y vos decias algo?

A: Otro cero más.

D: Otro cero más (anota 0,00001). ¿Y cuántas veces podría sumar ese?

A: Seiscientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.

D: (anota el cálculo: 699.999 x ...) ¿Hay posibilidad de sumar más números que seiscientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve?

As: (Gritan): Y sí, agregando otro cero.

D: Agregando otro cero más.

A: Y otro, y otro...

Tito: Hay infinitos ceros que se pueden poner ahí.

D: Tito agrega algo más, dice que hay infinitos ceros que puedo poner ahí

A: También serían infinitos nueves.

D: También aparecen infinitos nueves. O sea, ¿puedo hacerlo y no llegar nunca al diez?

A: Sí (Los chicos se ríen)

D: Porque me va a quedar nueve coma ..., ¿cuántos nueves?

A: Nueve, nueve, nueve, nueve, nueve.....

A: Infinitos.

Es interesante observar cómo los alumnos descubren a partir de este análisis (y del nuevo problema que plantea el docente al preguntar cada vez si sería posible encontrar una suma con más sumandos que, en realidad, ellos podrían seguir encontrando subunidades menores, y así aumentar, infinitamente, la cantidad de sumandos.

Vemos cómo, además, vinculan la subdivisión del número decimal con el aumento necesario de la cantidad de veces que habría que sumarlo. Obsérvese cómo logran *cercar* esa cantidad: parten de 7000; al ver que se *pasaban*, disminuyen a 6000 y, luego, lo extienden a la cantidad de veces posibles, sin llegar a 7000 con el cual alcanzarían el 10. Para las nuevas subdivisiones que van proponiendo, establecen, directamente, su vinculación con la cantidad de veces que es posible reiterarlas.

Asimismo, queremos resaltar cómo estas relaciones son explicitadas por muchos niños que, en sus resoluciones, no habían utilizado subdivisiones menores a los centésimos, tal es el caso de Ornella y Tito.

Después de la actividad mencionada, se propuso al mismo grupo el siguiente problema, el cual involucra a los alumnos en la búsqueda de decimales para intercalar entre otros dos, con intervalos cada vez más pequeños:

En parejas, un alumno debe decir un número entre 1 y 5; el otro alumno debe decir otro número entre 6 y 10. Por turnos, el primero sólo puede sumar un número al suyo y, el segundo únicamente le resta un número al suyo. El que se pase del último número dicho por su compañero, pierde.

En seguida presentamos el registro del juego desarrollado por una pareja de alumnos:

Guido	**Ornella**
1	8
(+1) 2	
	(–0,50) 7,50
(+0,50) 2,50	
	(–0,50) 7
(+ 0,50) 3	
	(–0,50) 6,50
(+1) 4	
	(–0,50) 6
(+1) 5	
	(–0,50) 5,50
Propone primero (+0,9).	
Cuando advierte que se pasaría, cambia por (+0,09): 5,09.	
	Se detiene un rato mirando la escritura y hace (–0,40): 5,10.
(+0,05) 5,14: "Me pasé".	
Observador: "¿Habrá posibilidad de sumar algún número sin pasarse?"	
Guido: "Sí, creo: cero coma cero uno". Lo hace, y obtiene 5,1.	
	Exclama: "¡Pero ya llegaste!", lo ayuda entonces sugiriéndole: "Con un cero más. Cero coma cero cero uno".
Lo hace y obtiene 5,091.	
Observador: "¿Cómo hacen ahora para saber si no se pasó?"	
	"Porque es más chico, acá tiene un cero" (señalando el lugar de los décimos).
	"¡Pero esto es infinito! Porque vas haciendo cero coma cero, cero, cero, cero, cero..."

Entre otras cosas, vemos aquí cómo Guido ajusta el número propuesto cuando se pasa con 0,9. También nos dice cómo buscar un número menor, intercalando otro cero, para no pasarse.

Nos parece interesante resaltar la equivalencia establecida por Ornella (entre 5,10 y 5,1) aunque no se trata de la misma escritura, pues un error muy frecuente en las interpretaciones de los números decimales por parte de los niños es considerarlos como dos números diferentes, como consecuencia de interpretarlos desde el modelo que construyeron para los naturales; es decir, como dos números naturales separados por una coma.

Ornella llega incluso a explicitar cómo hacer para encontrar números cada vez menores. Algo similar ocurría con los alumnos en el resto de las mesas. A medida en que se acercaban al número del compañero, buscaban subdivisiones menores de sus números, y llegaban, en algunos casos, a sumar o restar decimales con nueve cifras después de la coma.

Aquí, a diferencia de la actividad anterior y muy probablemente como efecto de la resolución y discusión a propósito de ella, y porque esta situación lo exige con más fuerza; los niños recurren rápidamente, a subunidades menores, y van realizando nuevos recortes hasta advertir que así pueden seguir...

En esta búsqueda, los alumnos vuelven a utilizar para una nueva situación, la regla explicitada en la situación anterior: "basta con agregar ceros". Cabe aclarar que no es una regla utilizada a ciegas, pues estos chicos saben cuándo y cómo usarla, y tratan de achicar el intervalo para no alcanzar un límite.

Estos problemas representan un desafío en el modo en que los niños conciben, inicialmente, a los decimales —desde un modelo construido para los números naturales— en tanto subunidades que llegan a un límite más allá del cual resultan indivisibles, y así fuerzan a los alumnos a pensar en la posibilidad de subdivisiones menores a las encontradas.

A MODO DE CIERRE

Nos hemos referido, solamente, a un recorte muy acotado de la enseñanza de los números decimales, que debe incluirse en un marco de trabajo más amplio. Con los problemas analizados se busca explorar en los alumnos, algunos aspectos respecto al valor posicional y a la densidad de los números decimales.

De esta forma, mediante estos problemas los alumnos han desarrollado o evolucionado sus conocimientos iniciales y pusieron en juego sus concepciones, aunque insuficientes, como punto de partida. Ahora bien, hemos visto como esos problemas, y las interacciones promovidas en las clases, ponían límites a los conocimientos y guiaron a los alumnos para reorganizarlos, rechazarlos o ampliarlos, en dirección a nuevos conocimientos respecto de estos números.

Si se considera que el aprendizaje es una adaptación a una situación problema nueva y las dificultades que con esta situación se presentan, entonces las dificultades son fundamentales para provocar tal adaptación. Así, los nuevos conocimientos aparecen entonces como solución a los desafíos que se plantean en los problemas.

Es preciso resaltar que, si bien la potencia de los problemas para levantar concepciones y conocimientos previos es fundamental, no es suficiente. Como hemos intentado comunicar, las intervenciones de los docentes y las interacciones entre pares son las que han provocado la aparición de nuevos conocimientos en el aula.

Por último, nos interesa explicitar que no ha sido nuestro objetivo, exclusivamente, promover aprendizajes en el terreno de la lectura, la escritura o el orden de los números decimales; el propósito de estas clases es más ambicioso: se intenta promover condiciones para que los alumnos estudien el funcionamiento de los números. Por supuesto, estamos convencidos de que profundizar en el funcionamiento de los números decimales constituye una sólida base para la comprensión de las razones que subyacen a los problemas de interpretación, producción, orden y operaciones con estos números.

Hemos seleccionado algunas *imágenes* del trabajo en el aula que, desde nuestro punto de vista, permiten comunicar el trabajo didáctico dirigido a la comprensión del funcionamiento de aspectos relevantes de los números decimales, los cuales son importantes para la construcción del sentido en el conocimiento de los números decimales.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1980). Problèmes d´enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques 1*(1). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(1). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4*(2), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Francia: Université de Bordeaux.

Centeno, J. (1988). *Números decimales: ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Douady, R. (1980): Approche des nombres réels en situation d´apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques 1*(1). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Lerner (1992): *La matemática y la escuela aquí y ahora.* Buenos Aires: Aique.

Claudia Broitman
Dirección de Currícula del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
Dirección de Educación Primaria de la Provincia de Buenos Aires.
Universidad de Buenos Aires.
Argentina.
E-mail: *claubroi@house.com.ar*

Horacio Itzcovich
Dirección de Currícula del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
Dirección de Educación Primaria de la Provincia de Buenos Aires.
Dirección de Educación Superior de la Provincia de Buenos Aires.
Argentina.
E-mail: *yayo@pinos.com*

María Emilia Quaranta
Universidad de Buenos Aires.
Área de Coordinación Pedagógica de la Municipalidad de Hurlingham, Provincia de Buenos Aires.
Dirección de Educación Superior de la Provincia de Buenos Aires.
Argentina.
E-mail: *Quaranta@mail.retina.ar*